Tentamen Variatierekening en Optimale Besturingstheorie

Datum : 26-01-2010
Plaats : 5113.0202
Tijd : 9.00-12.00

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw het scalaire systeem

$$\dot{x} = -ax + u, \quad x(0) = x_0, \quad |u(t)| \leq M$$

vóor een constante a en een positieve constante M, en met kostencriterium

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt + x(1)$$

   (a) Bepaal de Hamiltoniaan voor dit optimale besturingsprobleem, en de differentiaalvergelijking voor de co-toestand p.

   (b) Wat is de optimale besturingsfunctie (als een functie van de tijd) voor het geval $M = \infty$?

   (c) Wat is de optimale besturingsfunctie voor eindige M ? Onderscheid hierbij tussen het geval $a \geq 0$ en $a < 0$.

2. (a) Beschouw het lineaire systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

met $x \in \mathbb{R}^n$ en $u \in \mathbb{R}^m$. Beschouw een 'set-point' $\bar{x}, \bar{u}$ met

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0,$$

en een kostencriterium

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [(x(s) - \bar{x})^T Q(x(s) - \bar{x}) + (u(s) - \bar{u})^T R(u(s) - \bar{u})]ds$$

met matrices $Q \geq 0$ en $R > 0$. Laat zien hoe dit optimale besturingsprobleem opgelost kan worden door het toepassen van de transformatie

$$z := x - \bar{x}, \quad v := u - \bar{u}$$

Laat in het bijzonder zien dat deze transformatie het optimale besturingsprobleem tot een standaard lineair-kwadratisch optimale besturingsprobleem in de toestandsvector z en ingang v reduceert. Wat is de algemene vorm van de optimale ingangsfunctie u^* en de waardefunctie $V(x,t)$?

1

(b) Pas het bovenstaande toe op het optimale besturingsprobleem voor het scalaire systeem

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 0,$$

met kostencriterium

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty [(x(s)-1)^2 + (u(s)-1)^2]ds$$

en bereken de optimale ingangsfunctie.

3. Beschouw het scalaire systeem

$$\frac{d}{dt}x = u, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

met evenwichtspunt $x = 0$. Natuurlijk maakt de terugkoppeling $u = -kx$ voor $k > 0$ het evenwichtspunt $x = 0$ van het systeem asymptotisch stabiel. De vraag kan zijn hoe groot we k moeten nemen (als functie van de tijd). Eén manier om een geschikte k te bepalen is om k te definiëren als een oplossing van

$$\frac{d}{dt}k = x^2 - k \tag{2}$$

De term x^2 in het rechterlid van (2) zorgt er voor dat k groeit als x^2 groot is. De term $-k$ zorgt ervoor dat k niet onnodig groot wordt.

(a) Beschouw de differentiaalvergelijkingen (1), (2) voor $u = -kx$ in de variabelen x en k. Onderzoek door middel van linearisatie de stabiliteit van het evenwichtspunt $(x, k) = (0, 0)$ van het resulterende stelsel differentiaalvergelijkingen.

(b) Laat door middel van een geschikte Lyapunovfunctie zien dat $(x, k) = (0, 0)$ een globaal asymptotisch stabiel evenwichtspunt is.

(c) Herhaal onderdeel (b) voor de volgende andere manier om een functie $k(t)$ te bepalen:

$$\frac{d}{dt}k = x^2 - k^3 \tag{3}$$

4. (a) Beschouw de volgende modificatie van het standaardprobleem in de variatierekening: Minimaliseer de integraal

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t)dt + P(x(0))$$

(voor een zekere functie P) over alle functies $x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ die voldoen aan de randvoorwaarde

$$x(T) = x_T$$

Wat worden de randvoorwaarden voor de Eulervergelijking in dit geval ?

(b) Nog een modificatie van het standaardprobleem in de variatierekening is de volgende: Minimaliseer de integraal

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t)dt + P(x(0)) + S(x(T))$$

over alle functies $x(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Wat worden de randvoorwaarden voor de Eulervergelijking nu ?

Puntenverdeling: Gratis 10

1. a: 10, b: 5, c: 10.
2. a: 15, b: 10.
3. a: 10, b: 10, c: 5.
4. a: 10, b: 5.